Anales PANEL'81/12 JAIIO
Sociedad Argentina de informática
e Investigación Operativa. Buenos Aires, 1981

# ESTRUCTURAS DE DATOS, COMPUTACION DETERMINISTICA E IMPLEMENTACION DE PROLOG

## PARTE I: AXIOMATIZACION DE LAS ESTRUCTURAS DE DATOS DE PROLOG

**Philippe Roussel**
**Gerard Battani**
**Ascánder Suarez**

Universidad Simón Bolívar. Caracas-Venezuela

### INTRODUCCION:

PROLOG es un lenguaje de muy alto nivel no determinístico basado en la lógica de primer orden, usa los conceptos de resolución y unificación {ROB 65} , fué desarrollado en la universidad de Marseille (Groupe d' Intelligence Artificielle) {COL 72}{ROU 75} basado en ídeas desarrolladas conjuntamente con la Universidad de Edimburgh(Department of Artificial Intelligence) {KOW 75} . Desde entonces se ha difundido ampliamente y se ha aplicado a preguntas y respuestas en Francés {COL 78} Castellano {DAH 78} y otro idiomas, manipulaciones algebraicas {BER 73 } generación de planes {WAR 74} demostración de teoremas {COE 75} comprehensión de frases habladas {BAT 75} , interpretación de imágenes, bases de datos lógicos {PIQ 79} aplicaciones químicas, farmacéuticas e industriales {PUT 77} .

- Se van a describir dos tipos de expresiones. Expresiones Externas (EE) y expresiones internas (EI).
- Cada una es una manera de representar términos del lenguaje PROLOG.
- Las EE son las que se usan habitualmente en el lenguaje mientras que las EI son más adaptadas a una implementación del mismo.

## I. Las Expresiones Externas

- Se componen de los subconjuntos dos a dos disjuntos:

  A de atómos

  V de variables

  F de funciones

  LNV de listas no vacias.

- Sintacticamente las expresiones externas se definen recursivamente como:

  - Un atómo es una secuencia finita de caracteres

    ejemplo [ ] ó atómo.

  - Una variable es una secuencia finita de caracteres

    ejemplo VARIABLE ó X1.

  - Una función es de la forma $f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ donde f(el símbolo funcional) es una secuencia finita de caracteres y $e_1, \ldots, e_n$ ( con $n \geq 1$) son expresiones externas de longitud finita.

  - Una lista no vacía es de una de las dos formas

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & [e_1, e_2, \ldots, e_n] \\ \text{ó} \quad (2) & [e_1, e_2, \ldots, e \mid e_{n+1}] \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{donde } n \geq 1 \text{ y } e_1, \ldots e_n,\ e_{n+1} \text{ son} \\ \text{expresiones externas de longitud finita} \end{array}$$

- Se llaman $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$ <u>elementos</u> de la lista.
- La longitud de una expresión externa es el número de caracteres que la componen.

NOTA - Generalmente se ponen restricciones a esas definiciones sintácticas ambiguas para diferenciar sintacticamente los elementos de cada tipo.

Por ejemplo las variables siempre empezaran por una letra mayúscula .

- Se puede notar que [ ] es un átomo pero no es una lista no vacia. Se dice que [ ] es la lista vacia y se define el conjunto L de listas como L = LNV $\cup$ [ ].

Se dice que una <u>expresión externa</u> esta en forma, normal si es un átomo, una variable, una lista en forma normal, ó una función en forma normal.

<u>Definición</u>: - Se dice que una <u>lista no vacia</u> $\ell$ esta en forma normal si $\ell$ es de una de las dos formas

(3) $[e_1, \ldots, e_n]$

(4) $[e_1, \ldots, e_n \mid e_{n+1}]$ donde $n \geq 1$, $e_{n+1} \notin L$

y $e_1, \ldots e_{n+1}$ son expresiones externas en forma normal.

- Se dice que una <u>función</u> esta en forma normal si sus argumentos son EE en formal normal.

- Se nota LFN el conjunto de listas no vacias en forma normal

  FFN el conjunto de funciones en forma normal

  EEFN el conjunto de expresiones externas en forma normal.

- Se puede notar que $[[\ ]]$ en una lista no vacia en forma normal, su único elemento es la lista vacia.

Definición: Se define la relación binaria $= >$ (ó regla de reescritura) sobre las LNV con las tres reglas:

(5) $[x_1,\ldots,x_n \mid [y_1,\ldots,y_m]] \Rightarrow [x_1,\ldots x_n, y_1,\ldots,y_n]$

(6) $[x_1,\ldots,x_n \mid [y_1,\ldots y_m | y_{m+1}]] \Rightarrow [x_1 \ldots, x_n, y_1,\ldots,y_m | y_{,+1}]$

(7) $[x_1,\ldots,x_n | [\,]] \Rightarrow [x_1,\ldots,x_n]$

donde $n,m \geq 1$ , $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m,y_{m+1}$ son EE en forma normal

Definición: Se define $u \overset{i}{\Rightarrow} v$ con $u,v \in$ LNV

como $u \overset{o}{\Rightarrow} v$ ssí $u = v$

para $i > 0$ $u \overset{i}{\Rightarrow} v$ ssí (a) $\exists$ $z \in$ LNV tal que $u \Rightarrow z$ y $z \overset{i-1}{\Rightarrow} v$

(b) existe un elemento $u_j$ de u que no esta en forma normal. (es el más a la izquierda, es decir, no existe $u_\ell$ elemento de u, con $\ell < j$, que no esté en forma normal) entonces (b1) si $u_j$ es una lista : existen z lista y $z_k$ con $z_k$ elemento de Z tales que $u_j \Rightarrow z_k$

y $z \overset{i-1}{\Rightarrow} v$

(b2) si $u_j$ es una función, existe $w_n$ su primer argumento que no esta en forma normal:

existen z, función y $z_k$ argumento de z tales que

$w_n \Rightarrow z_k$

y $z \overset{i-1}{\Rightarrow} v$.

Se dice que $u \Rightarrow^{*} v$ si $\exists\ i \geq 0$ tal que $u \Rightarrow^{i} v$.

Ejemplos: $[a|\ [b\ |\ c]] \Rightarrow [a,b\ |\ c]$

$[[h|[\ ]]\ ,\ [d|[e|g]]\ ,\ f[a|[b|c]] \Rightarrow * [[h]\ ,\ [d|[e|g]],\ f[a|[b|c]] \Rightarrow *$

$[[h]\ ,\ [d,e|g]\ ,\ f[a|[b|c]] \Rightarrow * [[h]\ ,\ [d,e|g]\ ,\ f[a,b|c]]$ ;

Se puede notar que si se considera $\Rightarrow$ como una regla de simplificación sobre las listas $\Rightarrow *$ esta definida de manera de imponer un orden de simplificación : primero se simplifican los **elementos** de la lista empezando **por la izquierda** , y solo despues se simplifica la lista.

**Propiedad 1.** $\Rightarrow *$ es un orden parcial sobre LNV.

Mostremos que es antisimétrica por eso definimos para todo $\ell \in$ LNV la función entera $pc(\ell)$ como el número de pares de corchetes de la lista $\ell$.

como
$$\begin{cases} pc([\ ]) = 1 & \\ pc(e) = 0 & \text{si } e, \text{ es un átomo distinto de } [\ ] \text{ ó una variable.} \\ pc(f(e_1,\dots e_n)) = \sum_{i=1}^{n} pc(ei) & \text{con } e_i \text{ expresiones externas.} \\ pc([e_1,\dots e_n]) = 1 + \sum_{i=1}^{n} pc(e_i) & \text{con } e_i \text{ expresiones externas.} \end{cases}$$

verificamos que $\forall\ u,v \mid$ tales que $\exists i$ tal que $u \Rightarrow^{i} v$ entonces

$pc(u) < pc(v)$ . (por inducción)

entonces si $\exists\ i > 0$ tal que $u \Rightarrow^{i} v$ no existe $j$ $t_q$ $v \Rightarrow^{i} u$.

**Propiedad 2**: $z \in$ LNV es un infimo de $\Longrightarrow *$ ssí z está en forma normal.

**Prueba** $\leftarrow$ Si z está en forma normal no se aplica (5), (6) ó (7) sobre z ni tampoco sobre sus elementos puesto que estan también en forma normal,por lo tanto no existe z' tal que $z \Longrightarrow * z'$ $(z \neq z')$ y z es un infimo para $\Longrightarrow *$

$\rightarrow$ Si z es un infimo entonces no existe z' tal que $z \Longrightarrow * z'$ (con $z \neq z'$)

Como $z \in$ LNV, z es de forma (1) ó (2). Prueba del teorema por inducción sobre pc(z): si pc(z) = 1): si z es de forma $[z_1, \ldots, z_n]$ : no se puede aplicar $\Longrightarrow$ sobre z (por ser infimo) ni $\Longrightarrow *$ sobre cualquiera de sus argumentos es decir que todos son átomos ó variables, ó funciones con arg en forma normal sin listas y estan en forma normal, entonces por definición (3) z esta en formal normal.

Si z es de forma $[z_1, \ldots, z_n \mid z_{n+1}]$ por las mismas razones por definición (4) z esta en forma normal.

Se supone verdadero el teorema

para $pc(z) = k$

Mostremolo para $pc(z) = k+1$

Sí z es de la forma $z = [z_1, \ldots, z_n]$, $pc(z_i) \leq k \; \forall_i \leq n$ entonces cada $z_i$ esta en forma normal y por definición (3) z también está en forma normal.

Sí z es de la forma $z = [z_1, \ldots, z_n \mid z_{n+1}]$ $pc(z_i) < k \; \forall_i \leq n+1$ entonces cada $z_i$ esta en forma normal y $z_{n+1}$ no es de ninguna de las formas

(8) $[\,y_1,\dots,y_m\,]$

(9) $[\,y_1,\dots,y_m \mid y_{m+1}\,]$

(10) $[\quad]$

por que sino se podría aplicar (5), (6) ó (7) sobre z y z no sería un ínfimo, entonces $z_{n+1} \not\in L$

Luego z está en forma normal por definición (4).

**Teorema** $\forall \ell \in$ LNV existe $\ell' \in$ LFN tal que $\ell \Longrightarrow^{*} \ell$ y $\ell'$ es única.

**Prueba** Por las propiedades (1) y (2) se deduce que $\exists \ell' \in$ LFN tal que $\ell \Longrightarrow^{*} \ell'$

Mostremos que $\ell'$ es única.

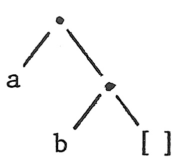
- por definición de $\Longrightarrow$ (partición en 3 casos mutualmente exclusivos) que se deduce que $\forall u \in$ LNV si existe v tal que $u \Longrightarrow v$ entonces v es única.
- por definición de $\Longrightarrow^{i}$ (partición en 3 casos mutualmente exclusivos) se deduce que $\forall u \in$ LNV si existen i y v tales que $u \Longrightarrow^{i} v$ entonces v es única.

La existencia de una forma normal única para cada lista nos permitira simplificar todas las manupulaciones formales sobre listas, trabajando con su forma normal.

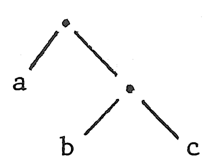
## II. Las Expresiones Internas.

Las expresiones vistas anteriormente, tienen dos tipos de estructuras, las funciones y las listas; generalmente se acostumbra representar las listas mediante funciones de una forma muy sencilla:

La lista [a,b] se representa como la función .(a,.(b, [])) y la lista [a,b|c] como la función .(a,.(b,c)); estas, vistas en forma de árbol serían:




[a,b]




[a,b|c]

Con esto, el problema de representación, sólo toma en cuenta variables, átomos y funciones.

En el sistema que se propone, las funciones se representan con listas; por ejemplo, la función f(a,g(b)) se representan como [f,a,[g,b]] donde f y g son símbolos de funciones.

Sean los siguientes subconjuntos dos a dos disjuntos:

A de Atomos

V de Variables

F' de functores o símbolos de función

LNV de listas no vacías.

Una Fxpresión Interna es:

- un átomo
- una variable
- un functor
- una lista no vacía de expresiones internas.

Como las listas no vacías, no cambian en las EI, todo lo dicho sobre expresiones en forma normal, se aplica también con las internas.

A cada EEFN se le puede hacer corresponder una EIFN; algunos ejemplos son:

[f(X), g(Y)]   se representa como   [[f, X], [g, Y]]

[f(a), b|f(c)]   se representa como   [[f, a], b, f, c]

Es fácil ver que hay EI que no corresponden a ninguna EE, tal es el caso de la lista [f, g] donde f y g son functores. Sin embargo para aquellas EI a las que les corresponde alguna EE, se puede demostrar que sólo les corresponde una.

**Función de transformación:**

Sea $\psi$: EEFN $\rightarrow$ EIFN la función de transformación definida por:

(1) $\psi(a) = a$   si a es un átomo o una variable

(2) $\psi(f(e_1,\ldots,e_n)) = [f,\psi(e_1),\ldots,\psi(e_n)]$   donde $f(e_1,\ldots,e_n)$ es una función

(3) $\psi([e_1,\ldots,e_n]) = [\psi(e_1),\ldots,\psi(e_n)]$

(4) $\psi([e_1,\ldots,e_n|e]) = [\psi(e_1),\ldots,\psi(e_n)|\psi(e)]$   si e no es una función

(5) $\psi([e_1,\ldots,e_n|f(e_{n+1},\ldots,e_m)] = [\psi(e_1),\ldots\psi(e_n),f,\psi(e_{n+1}),\ldots,\psi(e_m)]$

Las transformaciones (1), (2) y (3) preservan las formas normales, la cuarta también si e no es una función, como es el caso; para las funciones al final de una lista se usa (5) que no es mas que (4) normalizada.

En (2) $\psi$ hace corresponder a todas las funciones $f(e_1, \ldots, e_n)$, $n > 0$ el functor f, la diferencia entre por ejemplo la función f con un argumento y la función f con dos es el número de elementos que quedan en la lista, luego del functor.

Para ver que $\psi$ es inyectiva, sólo hace falta ver que es inyectiva para el caso de las funciones, puesto que para las otras expresiones se comporta como la identidad:

Sean $f(e_1,\ldots,e_n)$ y $f'(e_1',\ldots,e_m')$ dos funciones cualesquiera, tales que $\psi(f(e_1,\ldots,e_n)) = \psi(f'(e_1',\ldots,e_m'))$ por la definición de $\psi$, es evidente que $n = m$; por inducción sobre las funciones:

1. Si $e_1,\ldots,e_n$ y $e_1',\ldots,e_n'$ no contienen funciones:

   $[f, \psi(e_1),\ldots,\psi(e_n)] = [f', \psi(e_1'),\ldots, \psi(e_n')] \Rightarrow f = f'$ y $e_1 = e_1', \ldots, e_n = e_n'$ lo cual no significa más que $f(e_1,\ldots, e_n) = f'(e_1, \ldots, e_n)$

K. Si $\psi(e_1) = \psi(e_1'), \ldots, \psi(e_n) = \psi(e_n') \Rightarrow e_1 = e_1',\ldots, e_n = e_n'$ por tanto, por el mismo argumento anterior

$$f(e_1, \ldots, e_n) = f'(e_1', \ldots, e_n')$$

### III. Unificación de Expresiones en forma normal.

**Definición:** Una sustitución $\pi$ en un par $[v_1,\ldots,v_n]\backslash[x_1,\ldots,x_n]$ formado por una lista de variables distintas entre sí y una lista de expresiones (de la misma longitud que la de las expresiones), que representan la lista de expresiones con las que cada variable se sustituye. Estas expresiones cumplen con una restricción:

(R): La expresión $x_i$ correspondiente a la variable $v_i$ en una sustitución $\pi$ puede ser de dos formas:

(a) La misma $v_i$, indicando que no hay sustitución para ella.

(b) Una expresión finita cuyas variables pertenecen todas a la lista de variables de $\pi$ y tienen todas una sustitución de la forma (a).

**Definición:** La transformación $\psi$ se extiende para las sustituciones (externas), de la siguiente forma:

$$\psi([v_1,\ldots,v_n]\backslash[x_1,\ldots,x_n]) = [v_1,\ldots,v_n]\backslash[\psi(x_1,\ldots,\psi(x_n)]$$

que es una sustitución Interna.

**Definición:** Una sustitución $\pi$ es aplicable a una expresión $e$, si todas las variables de $e$, están todas en la lista de variables de $\pi$.

**Definición:** La aplicación $e.\pi$ de una sustitución $\pi$ aplicable a una expresión $e$ se define de la siguiente forma:

(1) $a.\pi = a$ si $a$ es un átomo

(2) $v_i.\pi = x_i$ si $v_i$ es una variable, $x_i$ es una expresión y $\pi = [v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n]\backslash[x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n]$

(3) $[e_1,\ldots,e_n] \;.\; \pi = [e_1.\pi,\ldots,\ldots,\ldots,e_n.\pi]$

(4) $[e_1,\ldots,e_n|e] \;.\; \pi = [e_1.\pi,\ldots,e_n.\pi|e.\pi]$ ; en el caso en que $e.\pi$ sea una lista, hay que normalizar. Y una de las reglas siguientes, dependiendo del tipo de expresión es:

(5.E) $f(e_1,\ldots,e_n).\pi = f(e_1.\pi,\ldots,e_n.\pi)$ donde $f$ es el nombre de una función cualquiera de aridad $n$.

(5.I) $f.\pi = f$ donde $d$ es un fuctor.

**Definición:** Una sustitución $\pi$ es un unificador para dos expresiones $e_1$ y $e_2$ si

(a) $e_1$ y $e_2$ no tienen variables distintas con el mismo nombre.

(b) $\pi$ es aplicable tanto a $e_1$ como a $e_2$ y

(c) $e_1.\pi = e_2.\pi$

**Definición** Dos expresiones $e_1$ y $e_2$ son unificables si existe un unificador $\pi$ para $e_1$ y $e_2$.

Ejemplo: Sean $e_1 = f(A, g(B, A))$ y $e_2 = f(h(C), D)$ un unificador para $e_1$ y $e_2$ puede ser, por ejemplo:

$$\pi = [A, B, C, D] \backslash [h(c), B, C, g(B, h(c))]$$

de manera que:

$$e_1.\pi = e_2.\pi = f(h(c), g(B, h(c)))$$

Todas estas definiciones son válidas, tanto para las EI como para las EE y más aún, se puede demostrar que la transformación $\psi$ preserva la unificación:

<u>**Teorema**</u>: Sean $e_1$ y $e_2$ dos EE y $\pi$ un unificador para ellas, entonces:

$$e_1.\pi = e_2.\pi \Rightarrow \psi(e_1).\psi(\pi) = \psi(e_2).\psi(\pi)$$

Para la demostración, se usará la proposición:

$$\psi(e.\pi) = \psi(e) \, . \, \psi(\pi)$$

<u>**Demostración del Teorema**</u>:

$$\begin{aligned} e_1.\pi = e_2.\pi &\Rightarrow \psi(e.\pi) = \psi(e_2.\pi) \\ &\Rightarrow \psi(e_1).\psi(\pi) = \psi(e_2).\psi(\pi) \end{aligned}$$

<u>**Demostración de la proposición**</u>:

Haciendo inducción sobre listas y funciones:

1. Si a es un átomo

$\psi(a.\pi) = \psi(a) = \psi(a) \ . \ \psi(\pi)$

2. Si $e$ es una variable $V_i$

$\psi(V_i . [V_1,\ldots,V_i,\ldots,V_n]\backslash[X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n]) = \psi(X_i)$ y

$\psi(V_i).\psi([V_1,\ldots,V_i,\ldots,V_n]\backslash[X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n]) =$

$V_i[V_1,\ldots,V_i,\ldots,V_n]\backslash[\psi(X_1),\ldots,\psi(X_i),\ldots,\psi(X_n)] = \psi(X_i)$

3. Si $e$ es una lista (a)$[e_1,\ldots,e_n]$ ó (b)$[e_1,\ldots,e_{n-1}|e_n]$ tal que $\psi(e_i.\pi) = \psi(e_i).\psi(\pi)$, $i = 1,\ldots,n$

(a) $\psi([e_1,\ldots,e_n].\pi) = \psi[e_1.\pi,\ldots,e_n.\pi] =$

$[\psi(e_1.\pi),\ldots,\psi(e_n.\pi)] =$

$[\psi(e_1).\psi(\pi),\ldots, \psi(e_n).\psi(\pi)] =$

$[\psi(e_1),\ldots,\psi(e_n)].\psi(\pi) = \psi([e_1,\ldots,e_n]).\psi(\pi)$

(b) Se demuestra análogamente

4. Si $e$ es una función cualquiera de aridad $n$ $f(e_1,\ldots,e_n)$ tal que $\psi(e_i.\pi) = \psi(e_i).\psi(\pi)$ $i = 1,\ldots,n$

$\psi(f(e_1,\ldots,e_n).\pi) = \psi(f(e_1.\pi,\ldots,e_n.\pi)) =$

$[f,\psi(e_1.\pi),\ldots,\psi(e_n.\pi)] =$

$[f.\psi(e_1), \psi(\pi), \ldots\ldots,\psi(e_n).\psi(\pi)] =$

$[f.\psi(\pi),\psi(e_1).\psi(\pi),\ldots,\psi(e_n).\psi(\pi)] =$

$[f,\psi(e_1),\ldots,\psi(e_n)].\psi(\pi) =$

$\psi(f(e_1,\ldots,e_n)).\psi(\pi).$